Devoir maison n$^{\text{o}}$ 4 : Correction

Exercice 1.

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : étant donné la question suivante, il semble plus pertinent d'écrire F sous forme d'un Vect.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement $x-2y+3z=0$ ce qui se réécrit $x = 2y-3z$. Un vecteur de F est donc de la forme $\begin{pmatrix} 2y-3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $F = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et en particulier $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. Déterminer une base et la dimension de F.

D'après la question précédente, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de F. Montrons que cette famille est libre. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cela donne directement $\alpha = \beta = 0$ donc la famille est libre. Ainsi $\boxed{(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ est une base de } F}$ et donc $\boxed{\dim F = 2}$.

3. Mêmes questions pour $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = x + y + z = 0\}$.

On procède comme aux questions précédentes avec cette fois un système.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à G si et seulement si

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y = -2x \\ x - 2x + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

Un élément de G est donc de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $G = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Ainsi $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$ dont $\boxed{\text{une base est } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (car ce vecteur est non nul) et en particulier $\boxed{\dim G = 1}$.

4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

On va utiliser la caractérisation $\mathbb{R}^3 = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) \\ F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \end{cases}$.

- D'abord, d'après les deux questions précédentes, $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
- Il reste donc à s'intéresser à $F \cap G$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$. Cela équivaut à

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \underset{\substack{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x + 5z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 8z = 0 \\ x = z \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = z = 0$$

donc $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'autre inclusion étant triviale (intersection de sev), on obtient $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Bilan : On déduit de ces deux points que $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$.

Exercice 2.

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de B. En déduire que B est inversible.

On procède à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss en échelonnant la matrice, *i.e.* en faisant apparaître des zéros partout sous la diagonale.

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow L_3 - 3\mathrm{L}_1}{\overset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & -7 & 16 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{\mathrm{L}_3 \leftarrow L_3 + \frac{7}{4}\mathrm{L}_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matrice échelonnée possède trois pivots non nuls donc $\boxed{\mathrm{rg}(B) = 3}$. Comme le rang de la matrice est égal à sa taille, on en déduit que $\boxed{B \text{ est inversible}}$.

2. Déterminer B^{-1}.

On reprend et poursuit les calculs de la question précédente avec la matrice identité à côté jusqu'à faire apparaître la matrice identité à gauche. On a (faire les calculs intermédiaires !) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & 7/4 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

Donc $\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 9 & 16 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}}$. (*On peut vérifier que* $B \times B^{-1} = \mathrm{I}_3$.)

Exercice 3.

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

On doit montrer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et que φ est linéaire.

- Montrons d'abord que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= P + (1 - X)P' \\ &= a + bX + cX^2 + (1 - X)(b + 2cX) \\ &= a + b + 2cX - cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

- Montrons maintenant que φ est linéaire. Soient P, $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+\mu Q) &= \lambda P+\mu Q+(1-X)(\lambda P+\mu Q)' \\ &= \lambda P+\mu Q+(1-X)(\lambda P'+\mu Q') \\ &= \lambda[P+(1-X)P']+\mu[Q+(1-X)Q'] \\ &= \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q) \qquad \text{donc } \varphi \text{ est linéaire.}\end{aligned}$$

- Comme φ est linéaire et va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$.

2. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

On calcule les images des éléments de la base canonique $\mathcal{B}$ et on les exprime dans cette base. On a

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1+(1-X)\times 0 = 1 \\ \varphi(X) &= X+(1-X)\times 1 = 1 \\ \varphi(X^2) &= X^2+(1-X)\times 2X = -X^2+2X.\end{aligned}$$

Ainsi

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : on aurait aussi pu reprendre le calcul du début de la question 1 pour déterminer les images des éléments de $\mathcal{B}$ en prenant par exemple $a=b=0$ et $c=1$ pour calculer $\varphi(X^2)$.

3. L'application φ est-elle un isomorphisme ?

L'application φ est un isomorphisme (ou automorphisme) si et seulement si sa matrice dans une base est inversible. Comme ici la matrice M possède deux colonnes identiques, elle n'est pas inversible, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas un isomorphisme}}$.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(M)$ et en déduire le noyau de φ. On précisera en particulier la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M) \iff M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2c=0 \\ -c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ c=0 \end{cases}$$

Ainsi un élément de $\mathrm{Ker}(M)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}}$.

Pour déduire $\mathrm{Ker}(\varphi)$ à partir de $\mathrm{Ker}(M)$, remarquons que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ représente, dans la base canonique $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$, le polynôme $a+bX+cX^2$. Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ représente le polynôme $1-X$ d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{1-X\}}$.

En particulier, comme $1-X$ n'est pas le polynôme nul, on a $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1}$.

5. En déduire le rang de φ.

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi)+\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Or d'après la question précédente, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$ et d'après le cours $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, d'où $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = 2}$.

Exercice 4.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 - 4M + 3\mathrm{I}_2$.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$. D'où après calcul de la somme $\boxed{M^2 - 4M + 3\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2}$.

2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de I_2 et M.

D'après la question précédente, on a $M^2 - 4M = -3\mathrm{I}_2$ d'où en divisant par -3 : $\frac{-1}{3}M^2 + \frac{4}{3}M = \mathrm{I}_2$, ce qui se réécrit $M \times \left(\frac{-1}{3}M + \frac{4}{3}\mathrm{I}_2\right) = \mathrm{I}_2$. Ainsi, $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{-1}{3}M + \frac{4}{3}\mathrm{I}_2}$.

3. *Question de cours* : Rappeler le théorème de la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme B.

Soient A et B deux polynômes avec B non nul. Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ et deux réels a_n et b_n tels que

$$X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + a_nX + b_n.$$

En appliquant le théorème de la division euclidienne dans le cas $A = X^n$ et $B = X^2 - 4X + 3$, on obtient qu'il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $\boxed{X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + R(X)}$ avec $\boxed{\deg(R) < 2}$. En particulier, R est de la forme $\boxed{R(X) = a_nX + b_n}$ pour deux réels a_n et b_n.

5. En évaluant la relation précédente en $X = 1$ et en $X = 3$, déterminer les valeurs de a_n et b_n.

Pour $X = 1$, on obtient $1 = 0 + a_n + b_n$ et pour $X = 3$, on a $3^n = 0 + 3a_n + b_n$. On résout alors le système formé par ces deux équations :

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n = 3^n - 1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a_n = \dfrac{3^n - 1}{2} \\ b_n = 1 - a_n = \dfrac{3 - 3^n}{2} \end{cases}}$$

6. En déduire l'expression de M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + \frac{3^n - 1}{2}X + \frac{3 - 3^n}{2} \quad \text{avec } Q \in \mathbb{R}[X].$$

En prenant cette égalité en $X = M$, grâce à la question 1, il vient

$$M^n = 0_2 + \frac{3^n - 1}{2}M + \frac{3 - 3^n}{2}\mathrm{I}_2 \overset{\text{calculs}}{=} \boxed{\begin{pmatrix} 2 - 3^n & 2(3^n - 1) \\ 1 - 3^n & 2 \times 3^n - 1 \end{pmatrix}}.$$